Tripoli university
Faculty of engineering
EE department EE313

Solutions of section (4-7) of the book.

Problem # 4-24.

في نظام الاحداثيات الكارتيزي :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

ولكن في مسألتنا هذه ولكون الصفيحتين ممتدتين في y و z إلى مالا نهاية فإن Φ لن يكون دالة في y و z ولذلك $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$.
و بذلك تصبح معادلة لابلاس لهذه المسألة :-

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \Phi}{d x^2} = 0$$

حيث تم استبدال التفاضل الجزئي $\frac{\partial}{\partial x}$ بتفاضل عادي $\frac{d}{dx}$ لأن Φ دالة في متغير واحد هو X . بالتكامل مرتين فإن حل المعادلة التفاضليه (الحل العام) هو :-

$$\Phi(x) = C_1 X + C_2$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت اختيارية يمكن إيجادها من الشروط الحدية.
الشروط الحدية التي لدينا في هذه المسألة هي :-

$$\Phi(0) = V \quad , \quad \Phi(d) = 0 .$$

وبتطبيق الشرط الأول :-

$$V = C_1(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = V$$

وبتطبيق الشرط الثاني :-

$$0 = C_1(d) + V \Rightarrow C_1 = -\frac{V}{d}.$$

$$\boxed{\therefore \Phi(x) = -\frac{V}{d}x + V}$$

ويمكن حساب $\vec{E}$ من العلاقة :

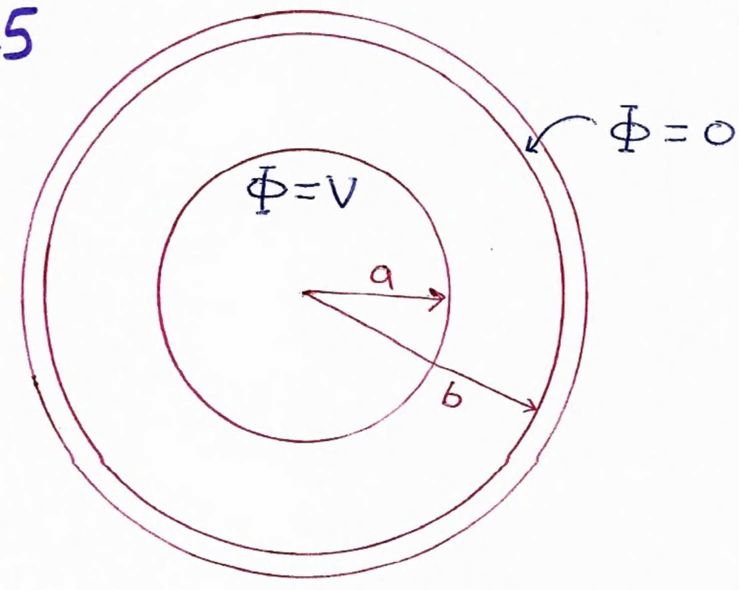
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{a_x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{a_y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{a_z}\right)$$

$$= \frac{V}{d}\vec{a_x}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{V}{d}\vec{a_x}\ (V/m)}$$

(مجال كهربي منتظم).

Problem # 4-25



لدينا في نظام الاحداثيات الكروية :-

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

ومن التماثل الكروي للمسألة نستنتج أن Φ لا تعتمد على الزوايا ϕ و θ ومن ذلك $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 0$.

وبذلك تصبح معادلة لابلاس لهذه المسألة :-

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0$$

وبالضرب في r^2 :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0$$

وبالتكامل مرة :-

$$r^2\frac{d\Phi}{dr} = C_1$$

ويمكن كتابة هذا على الصورة :-

$$d\Phi = C_1\frac{dr}{r^2}$$

وبالتكامل مرة أخرى :-

$$\Phi = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت اختيارية يمكن ايجادها من الشروط الحدية .

الشروط الحدية لهذه المسألة هي :-

$$\Phi(a) = V \quad , \quad \Phi(b) = 0$$

بتطبيق الشرط الأول :-

$$V = -\frac{c_1}{a} + c_2 \longrightarrow (1)$$

وبتطبيق الشرط الثاني :-

$$0 = -\frac{c_1}{b} + c_2 \longrightarrow (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) :-

$$V = c_1\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Rightarrow c_1 = \frac{V}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

وبالتعويض في المعادلة (2) :-

$$0 = -\frac{1}{b}\left(\frac{V}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}\right) + c_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{\frac{V}{b}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

$$\therefore \Phi(r) = -\frac{1}{r}\left(\frac{V}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}\right) + \frac{\frac{V}{b}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

$$\boxed{\Phi(r) = \frac{V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)}$$

[أنظر المسألة (4-19)]

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$= -\left(\vec{a}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \vec{a}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)$$

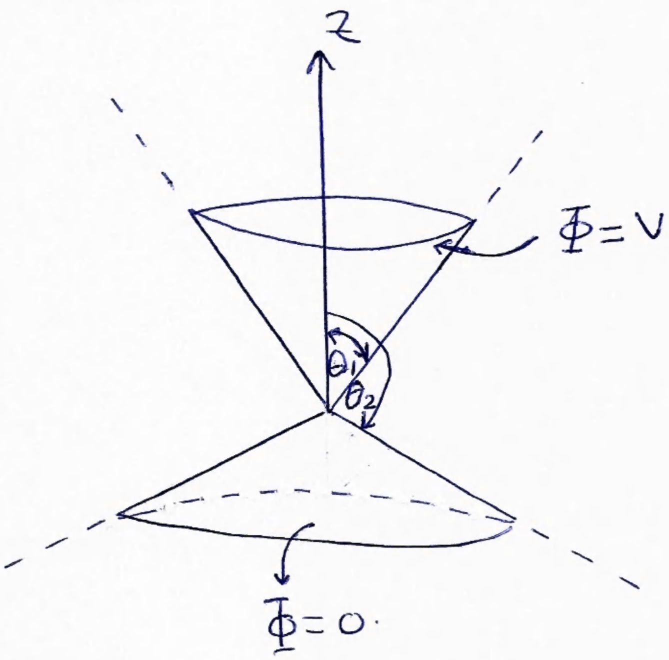
وحيث أن Φ دالة في r فقط :-

$$\vec{E} = -\vec{a}_r \frac{d\Phi}{dr}$$

$$= -\vec{a}_r \frac{V}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{a}_r \frac{V}{r^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}}$$

Problem#4-26



باعتبار السطحين المخروطيين موجودين عند سطوح $\theta = \text{constant}$
فإن السطوح متساوية الجهد بينهما هي أيضاً سطوح $\theta = \text{Const.}$ مما يعني
أن الجهد Φ ليس دالة في r ولا ϕ وعلى ذلك $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0$.
ويكون Φ دالة في θ فقط .
معادلة لابلاس لهذه المسألة تصبح :-

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) = 0$$

وبالضرب في $r^2 \sin\theta$:-

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta}\right) = 0$$

وبالتكامل مرة :-

$$\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta} = c_1$$

ويمكن كتابتها على صورة :-

$$d\Phi = c_1 \csc\theta \, d\theta$$

وبالتكامل مرة أخرى :-

$$\Phi = c_1 \ln(\csc\theta - \cot\theta) + c_2$$

وباستخدام المتطابقة (سيتم اثباتها لاحقاً) : $\tan(\frac{\theta}{2}) = \csc\theta - \cot\theta$

$$\Phi(\theta) = c_1 \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + c_2$$

حيث c_1 و c_2 ثوابت يمكن حسابها من الشروط الحدية :-

$$\Phi(\theta_1) = V \quad , \quad \Phi(\theta_2) = 0 .$$

بتطبيق الشرطين الحديين :-

$$V = C_1 \ln\left(\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right) + C_2 \longrightarrow (1)$$

$$0 = C_1 \ln\left(\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right) + C_2 \longrightarrow (2).$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) :-

$$V = C_1 \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)\right]$$

$$= C_1 \ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]$$

$$\therefore C_1 = \frac{V}{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]}$$

وبالتعويض في المعادلة (2) :-

$$0 = \frac{V \ln\left(\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)}{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]} + C_2$$

$$\therefore C_2 = -\frac{V \ln\left(\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)}{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]}$$

إذاً يمكن كتابة $\Phi(\theta)$ على صورة :-

$$\Phi = \frac{V \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]} - \frac{V \ln\left(\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)}{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]}$$

$$= \frac{V}{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]} \left(\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)\right)$$

$$\boxed{\Phi(\theta) = V \frac{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]}{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]}}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{d\theta}\vec{a_\theta}$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{V}{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]} \frac{d}{d\theta}\left(\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right)\right)\vec{a_\theta}$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{V}{\ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]} \left(\frac{\frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}}{\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}}\right)\vec{a_\theta}$$

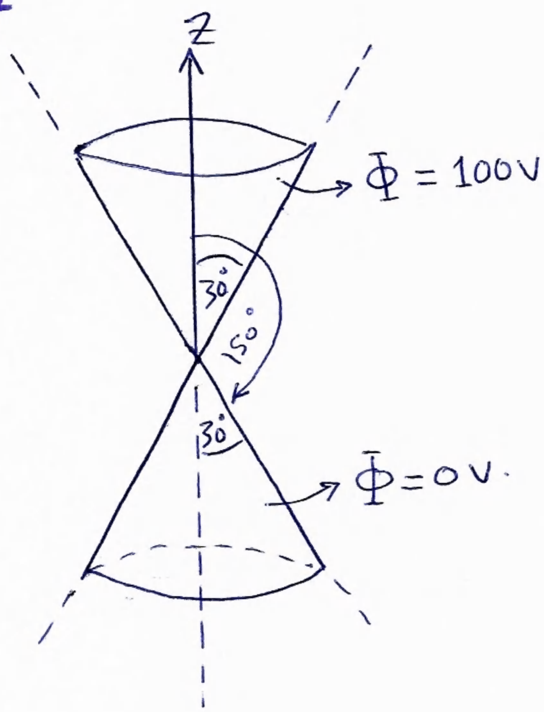
$$= -\frac{1}{r}\,\frac{V}{\ln\left[\frac{\tan(\frac{\theta_1}{2})}{\tan(\frac{\theta_2}{2})}\right]}\left[\frac{\cancel{1}/\cancel{2}}{\cos^2(\theta/2)}\cdot\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right]\vec{a_\theta}$$

$$= \frac{V}{r\ln\left[\frac{\tan(\frac{\theta_2}{2})}{\tan(\frac{\theta_1}{2})}\right]}\left[\frac{1}{2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})}\right]\vec{a_\theta}$$

وباستخدام المتطابقة : $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$:-

$$\boxed{\vec{E} = \frac{V}{r\sin\theta\ln\left[\frac{\tan(\frac{\theta_2}{2})}{\tan(\frac{\theta_1}{2})}\right]}\vec{a_\theta}}$$

Problem# 4-27



من المسألة السابقة :-

$$\Phi(\theta=90^\circ) = 100\,\frac{\ln\left[\dfrac{\tan(45^\circ)}{\tan(75^\circ)}\right]}{\ln\left[\dfrac{\tan(15^\circ)}{\tan(75^\circ)}\right]}$$

$$= 100\,\frac{(-1.317)}{(-2.634)} = 50 \text{ volts.}$$

في المطلوب (b) من المسألة يراد ايجاد θ كدالة في Φ ورسم المنحنى .

في المسألة السابقة لدينا :-

$$\Phi = V\,\frac{\ln\left[\dfrac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\tan(\frac{\theta_2}{2})}\right]}{\ln\left[\dfrac{\tan(\frac{\theta_1}{2})}{\tan(\frac{\theta_2}{2})}\right]}$$

$$\therefore \ln\left[\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\tan(\frac{\theta_2}{2})}\right] = \frac{\Phi}{V}\ln\left[\frac{\tan(\frac{\theta_1}{2})}{\tan(\frac{\theta_2}{2})}\right]$$

$$\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\tan(\frac{\theta_2}{2})} = e^{\frac{\Phi}{V}\ln\left[\frac{\tan(\frac{\theta_1}{2})}{\tan(\frac{\theta_2}{2})}\right]}$$

ومن العلاقة $(e^m)^n = e^{mn}$ يمكن كتابة :-

$$\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\tan(\frac{\theta_2}{2})} = \left[\frac{\tan(\frac{\theta_1}{2})}{\tan(\frac{\theta_2}{2})}\right]^{\Phi/V}$$

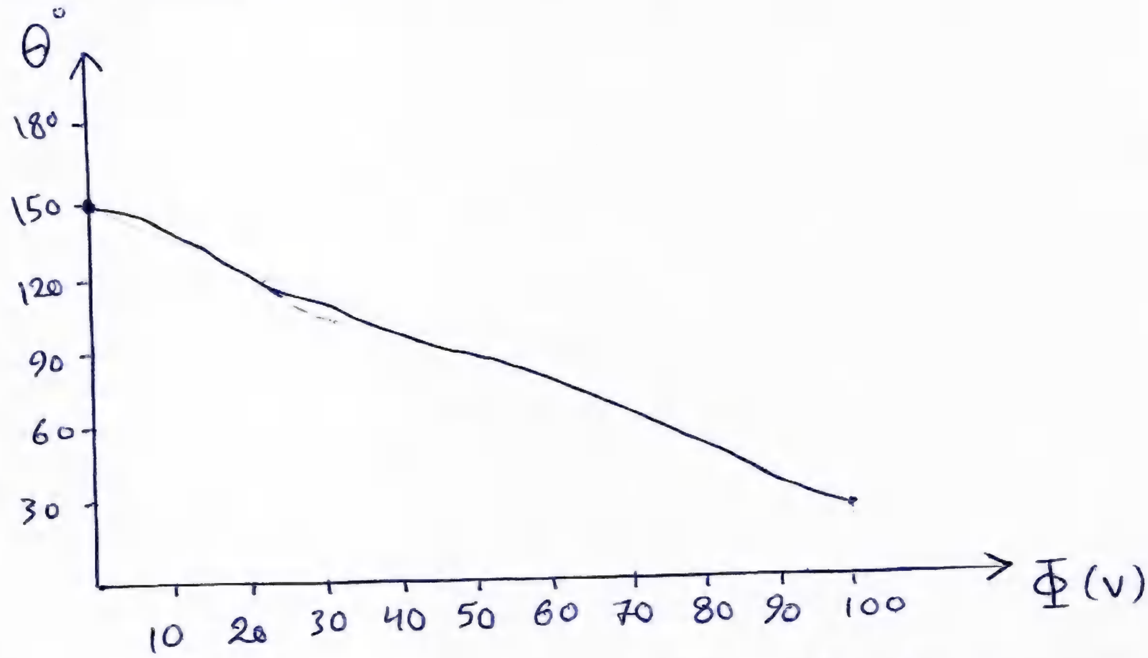
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left[\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right]^{\Phi/V} \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ \theta = 2\tan^{-1}\left[\left(\frac{\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right)^{\Phi/V} \tan\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right]}$$

وفي هذه المسألة حيث $V=100$ و $\theta_2=150^\circ$ و $\theta_1=30^\circ$:

$$\theta = 2\tan^{-1}\left[(0.0718)^{0.01\Phi}\,(3.73)\right]$$

Φ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
θ	150°	141.5°	131°	119°	105°	90°	75°	61°	49°	38.5°	30°



العلاقة تكاد تكون خطية.

من نتيجة المسألة السابقة وبالتعويض عن V و θ_1 و θ_2 :-

$$E_\theta = \frac{38}{r} \csc\theta$$

في المطلوب (d) من المسألة يراد حساب الكثافة السطحية للشحنة ρ_s على الموصل المخروطي العلوي . ومن ثم حساب الشحنة من $r=0$ إلى $r = 1m$.

حيث أن $\vec{E}$ له اتجاه $\vec{a}_\theta$ فبالتالي هو عمودي على سطح الموصل $\theta=30^\circ$ وبالتالي فإن $\rho_s = D_n$:

$$\rho_s = \epsilon_0 E_\theta \Big|_{\theta=30^\circ} = \frac{76\epsilon_0}{r}$$

$$q = \int_s \rho_s ds = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \frac{76\epsilon_0}{r} (r\sin\theta\, dr\, d\phi)$$

$$= 38\epsilon_0\ (2\pi) = 76\pi\epsilon_0$$

Problem # 4-28

من المثال (4-12) وحيث أن حل معادلة لابلاس لا يعتمد على العازل ، فكذلك المجال $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \vec{a}_\rho \frac{V}{\ln(\frac{b}{a})} \frac{1}{\rho}$$

وحيث أن $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$:-

$$\vec{D}_1 = \vec{a}_\rho \frac{\epsilon_1 V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\rho} \qquad , 0<\phi<\pi$$

$$\vec{D}_2 = \vec{a}_\rho \frac{\epsilon_2 V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\rho} \qquad , \pi<\phi<2\pi$$

ومن المعادلة (3-45) فإنه على السطح $\rho = a$:-

$$\rho_{s1} = \frac{\epsilon_1 V}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad , 0<\phi<\pi .$$

$$\rho_{s2} = \frac{\epsilon_2 V}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad , \pi<\phi<2\pi .$$

ولحساب الشحنة الكلية على طول l من الموصل الداخلي :-

$$q = \int_{s_1} \rho_{s1} ds + \int_{s_2} \rho_{s2} ds$$

$$= \frac{\epsilon_1 V}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_{z=0}^{l} \int_{\phi=0}^{\pi} a\, d\phi\, dz + \frac{\epsilon_2 V}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_{z=0}^{l} \int_{\phi=\pi}^{2\pi} a\, d\phi\, dz$$

$$= \frac{\pi l \epsilon_1 V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{\pi l \epsilon_2 V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\pi l (\epsilon_1 + \epsilon_2) V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

وحيث أن $C = \frac{q}{V}$:-

$$\boxed{C = \frac{\pi l (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

و بالنظر إلى المعادلة (4-51) حيث العازل متجانس :-

$$C = \frac{2\pi l \epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \longrightarrow (4-51)$$

وإذا أخذنا نصف الاسطوانة :

$$C = \frac{\pi l \epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

ومن هذا نجد أن المكثف في مسألتنا هو توازي مكثفين كل منهما له عازل مختلف .

وإذا ضربنا البسط والمقام في 2 :

$$C = \frac{2\pi l (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}\right)$$

وبمقارنتها بالمعادلة (4-51) يمكن حساب السعة للمكثف باعتبار أن العازل متجانس وان ϵ هي المتوسط الحسابي لكل من العازلين .

Problem # 4-29

في المسألة (4-28) لدينا :-

$$\vec{E} = \vec{a}_\rho \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\rho}$$

$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{a}_\rho \dfrac{\epsilon_1 V}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} & 0 < \phi < \pi \\ \vec{a}_\rho \dfrac{\epsilon_2 V}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

وباستخدام المعادلة (4-58e) لحساب الطاقة المخزنة في المكثف :-

$$U_e = \frac{1}{2}\left[\int_{z=0}^{l} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\rho=a}^{b} \frac{\epsilon_1 V^2}{\rho^2 \left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \right.$$

$$\left. + \int_{z=0}^{l} \int_{\phi=\pi}^{2\pi} \int_{\rho=a}^{b} \frac{\epsilon_2 V^2}{\rho^2 \left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi l \epsilon_1 V^2}{\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\pi l \epsilon_2 V^2}{\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi l \epsilon_1 V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{\pi l \epsilon_2 V^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right]$$

$$U_e = \frac{\pi \ell V^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2 \ln(\frac{b}{a})}$$

ومن المعادلة (4-64a) :

$$C = \frac{2U_e}{V^2}$$

$$\boxed{\therefore C = \frac{\pi \ell (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln(\frac{b}{a})}}$$

نفس نتيجة المسألة (4-28).

Problem # 4-30

بالنسبة لـ Φ و $\vec{E}$ فهي لن تختلف عن المسألة (4-28) :-

$$\vec{E} = \vec{a_\rho} \frac{V}{\ln(\frac{b}{a})} \frac{1}{\rho}$$

وحيث أن $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$:-

$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{a_\rho} \dfrac{\epsilon_1 V}{\ln(\frac{b}{a})} \dfrac{1}{\rho} & , 0 < \phi < \phi_1 \\ \vec{a_\rho} \dfrac{\epsilon_2 V}{\ln(\frac{b}{a})} \dfrac{1}{\rho} & , \phi_1 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

ومن الشروط الحدية على سطح الموصل الداخلي :

$$\rho_s = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_1 V}{a\ln(\frac{b}{a})} & 0<\phi<\phi_1 \\ \dfrac{\epsilon_2 V}{a\ln(\frac{b}{a})} & \phi_1<\phi<2\pi \end{cases}$$

ومن ذلك يمكن حساب الشحنة على سطح الموصل الداخلي لكل طول l من الموصل :-

$$q = \int_{z=0}^{l}\int_{\phi=0}^{\phi_1} \frac{\epsilon_1 V}{a\ln(\frac{b}{a})}\, a\, d\phi\, dz + \int_{z=0}^{l}\int_{\phi=\phi_1}^{2\pi} \frac{\epsilon_2 V}{a\ln(\frac{b}{a})}\, a\, d\phi\, dz$$

$$= \frac{l\phi_1\epsilon_1 V}{\ln(\frac{b}{a})} + \frac{l(2\pi-\phi_1)\epsilon_2 V}{\ln(\frac{b}{a})}$$

$$= \frac{lV[\epsilon_1\phi_1 + \epsilon_2(2\pi-\phi_1)]}{\ln(\frac{b}{a})}$$

وحيث أن $C = \frac{q}{V}$:-

$$C = \frac{l[\epsilon_1\phi_1 + \epsilon_2(2\pi-\phi_1)]}{\ln(\frac{b}{a})}$$

م/ عبد الله عياد أبو قرين
خريف 2012